第2講　2次関数(1)

【基礎確認事項】

［1］　**関数**

□2つの変数 x, y について，x の値を定めると y の値がただ1つ定まるとき，y は x の**関数**であるという．x の関数を $\boldsymbol{f(x)}$，$g(x)$ などと表す．

例　x の関数 $2x+1$ を $f(x)=2x+1$ と表し，この場合の関数 $f(x)$ は，x の値を定めると，それを2倍して1を加えた値に対応させる．

□y が x の関数であることを，$\boldsymbol{y=f(x)}$ などと表す．つまり，関数 $f(x)$ によって定められた値を y とする，ということである．

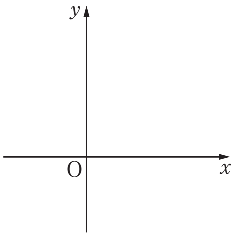
例　$f(x)=2x+1$ のとき，$y=f(x)$ とは $y=2x+1$ を表す．

もちろん，y 以外の文字（変数）に関数を対応させることもできる．

□関数 $f(x)$ において $x=t$ に対応する値を $f(t)$ とかき，関数を表す式の x に t を代入することでその値を求めることができる．

例　$f(x)=2x+1$ において $f(2)=2\cdot2+1=5$ である．

□平面上に，右図のように直交する2本の数直線をとる．その交点Oを**原点**といい，2本の数直線を**座標軸**という．



□座標軸は，横軸を x 軸，縦軸を y 軸と名付けることが多く，この場合は，横軸に変数 x の値を，縦軸に変数 y の値を対応させる．

□また，両軸を矢印で表すことにより，正の向きを定める．x 軸の正の向きを **$\boldsymbol{x}$ 軸方向**という．**$\boldsymbol{y}$ 軸方向**も同様である．

□あるグラフを，その形を変えずに一定の向きに一定の距離だけ動かすことを，そのグラフを**平行移動**する，という．関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，移動後のグラフを表す式は $y-q=f(x-p)$，すなわち

$$y=f(x-p)+q$$

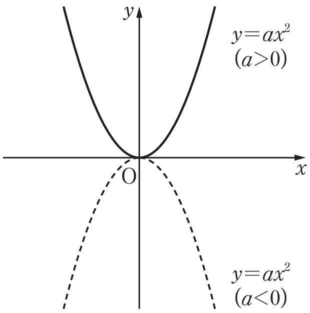
となる．これは「図形と方程式」における「軌跡」第23講［1］の考え方で導くことができる．この結果は x の関数 $f(x)$ の x に $x-p$ を代入し，さらに q を加えた式となる．

例　$y=2x+1$ のグラフを x 軸方向に2，y 軸方向に3平行移動したグラフは，$y=2(x-2)+1+3$　つまり $y=2x$ で表される．

> **関数 $\boldsymbol{y=f(x)}$ の平行移動**
> $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した式は
> $$y=f(x-p)+q$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

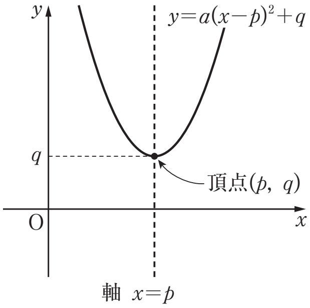
［2］　２次関数とそのグラフ



□ x の関数が 2 次式で表されるとき，この関数を x の **2 次関数**という．

□ 2 次関数 $y=ax^2$ のグラフは，y 軸に関して対称な放物線である．放物線には対称の軸が存在し，これを放物線の**軸**という．また，軸と放物線との交点を放物線の**頂点**という．$y=ax^2$ のグラフの頂点は原点である．

□ $a>0$ のとき**下に凸**であるといい，$a<0$ のとき**上に凸**であるという．



□ 2 次関数 $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，移動後のグラフを表す式は

$$y=a(x-p)^2+q$$

となる．このとき

グラフの軸は $x=p$，頂点は $(p,\ q)$

である．

例　関数 $y=-2(x+1)^2-3$ のグラフは，$y=-2x^2$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に -3 平行移動したものであり，その軸は $x=-1$，頂点は $(-1,\ -3)$ である．

□ 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形することで，その軸や頂点がわかる．x の 2 次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを**平方完成**するという．

例

$$\begin{aligned} y&=2x^2+3x+4 \\ &=2\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)+4 \\ &=2\left\{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right\}+4 \\ &=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}+4 \\ &=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8} \end{aligned}$$

（x^2 の係数でくくる．）
（x の係数を半分にし，2 乗でくくる．さらに，半分にした値の 2 乗を引く．）
（x^2 の係数を分配）
（定数項をまとめる．）

$$\begin{aligned} y&=ax^2+bx+c \\ &=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c \\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

軸：$x=-\dfrac{3}{4}$　頂点 $\left(-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{23}{8}\right)$

軸：$x=-\dfrac{b}{2a}$　頂点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線であり，その軸は $x=-\dfrac{b}{2a}$，頂点は $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ である．

⇒　C&U 1

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［３］　２次関数の移動

□２次関数のグラフは，x^2 の係数とその頂点によって１つに定まる．一般的には２次関数のグラフの移動は，x^2 の係数と頂点の座標に注目するとよい．

□軌跡の考え方を用いると，先に述べた平行移動に加え，対称移動について以下のことが成り立つ．

関数 $y=f(x)$ のグラフを対称移動した式は

x 軸対称：$-y=f(x)$　　y 軸対称：$y=f(-x)$　　原点対称：$-y=f(-x)$

⇒　C&U ２

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1 次の 2 次関数のグラフの軸の方程式と頂点の座標を求めよ．また，そのグラフをかけ．

(1) $y=x^2+2x+3$　　(2) $y=-2x^2+2x-1$　　(3) $y=\frac{1}{3}x^2-x-6$

2 放物線 $y=2x^2-4x$ のグラフを次のように移動して得られる放物線の方程式を求めよ．

(1) x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 平行移動

(2) x 軸に関して対称に移動

(3) y 軸に関して対称に移動

(4) 原点に関して対称に移動

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　2次関数(1)

1 (1)　放物線 $y=-2x^2+3x-4$ を x 軸方向に1, y 軸方向に3平行移動した放物線の方程式を求めよ.

(2)　ある放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に -2, y 軸方向に1平行移動すると放物線 $y=3x^2-6x+4$ に重なった. 定数 a, b, c の値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　放物線 $y=2x^2-x+3$ を次の点や直線に関して対称に移動した放物線の方程式を求めよ.

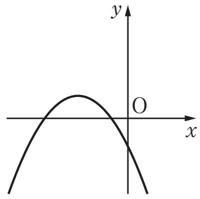
(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点　　(4)　直線 $x=1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　右図は2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフである．次の値の符号を調べよ．



(1)　a　　(2)　c

(3)　b　　(4)　$a+b+c$

(5)　b^2-4ac

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　２次関数(1)

(1)　放物線 $y=x^2-2x+3$ の頂点の座標は（ ア ， イ ）であり，この放物線のグラフを x 軸方向に ウ ，y 軸方向に エ 平行移動すると放物線 $y=x^2-6x+14$ のグラフと重なる．

(2)　放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に 4 平行移動し，さらに原点に関して対称に移動すると，放物線 $y=-x^2-6x-11$ となるとき，$a=$ オ ，$b=$ カ ，$c=$ キ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　２次関数(1)

【CHECK & UP】

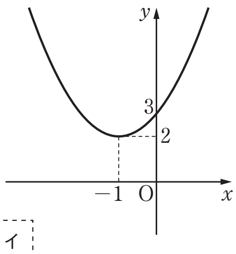
1 (1) $y=x^2+2x+3$

$=(x+1)^2-1+3$

$=(x+1)^2+2$

(1) x^2 の係数が１であるため，x^2 の係数でくくるというステップはない．先頭から２つの項で２乗の形をつくる際に，x の係数２を半分の１にし，展開すると出てくる不要な１を引く．

軸　$\boldsymbol{x=-1}$　頂点　$\boldsymbol{(-1,\ 2)}$　よって，グラフは右図．



(2) $y=-2x^2+2x-1$

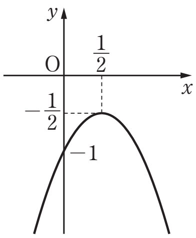
$=-2(x^2-x)-1$

$=-2\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}-1$

$=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-1$

$=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

(2) x^2 の係数 -2 で先頭の２項をくくる．マイナスでくくったため x の係数の符号が $\pm$ 逆になっている．２乗の形をつくる際にカッコで囲うため，その前にあったカッコが中括弧{ }に変わっていることに注意．２乗の形においては x の係数 -1 を半分の $-\frac{1}{2}$ にし，その２乗 $\frac{1}{4}$ を引く．さらに x^2 の係数 -2 を分配することで，$-\frac{1}{4}$ が $\frac{1}{2}$ となっている．慣れてくると暗算でできる部分が出てくるが，符号ミス，分配ミスに注意．



軸　$\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$　頂点　$\boldsymbol{\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)}$　よって，グラフは右図．

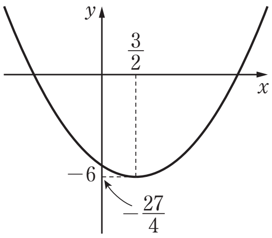
(3) $y=\frac{1}{3}x^2-x-6$

$=\frac{1}{3}(x^2-3x)-6$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}-6$

$=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{4}-6=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{27}{4}$　軸　$\boldsymbol{x=\frac{3}{2}}$　頂点　$\boldsymbol{\left(\frac{3}{2},\ -\frac{27}{4}\right)}$

(2) x^2 の係数が分数の場合は，くくるときにその逆数を x の係数に掛ける．



よって，グラフは右図．

2 $y=2x^2-4x=2(x^2-2x)=2\{(x-1)^2-1\}=2(x-1)^2-2$

この放物線の頂点は $(1,\ -2)$ である．

(1) x 軸方向に２，y 軸方向に -3 平行移動すると，頂点は $(3,\ -5)$ に移動する．よって求める式は

$\boldsymbol{y=2(x-3)^2-5}$　$(y=2x^2-12x+13)$

(1) 平行移動は，x^2 の係数は変わらず頂点の座標が変化する．移動後の式は平方完成された形のままでよく，必要に応じて展開する．

(2) x 軸に関して対称に移動すると，頂点は $(1,\ 2)$ に移動し，凸方向が逆となる．よって求める式は

$\boldsymbol{y=-2(x-1)^2+2}$　$(y=-2x^2+4x)$

(2)(4) 対称移動により凸方向が変わる場合は，x^2 の係数の $\pm$ を逆にする必要がある．移動はグラフを頭にイメージすること．

(3) y 軸に関して対称に移動すると，頂点は $(-1,\ -2)$ に移動する．よって求める式は

$\boldsymbol{y=2(x+1)^2-2}$　$(y=2x^2+4x)$

(4) 原点に関して対称に移動すると，頂点は $(-1,\ 2)$ に移動し，凸方向が逆となる．よって求める式は

$\boldsymbol{y=-2(x+1)^2+2}$　$(y=-2x^2-4x)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　２次関数(1)

1　(1)　放物線 $y=-2x^2+3x-4$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 平行移動した放物線の方程式を求めよ．

(2)　ある放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 平行移動すると放物線 $y=3x^2-6x+4$ に重なった．定数 a，b，c の値を求めよ．

(1)　$y=-2x^2+3x-4=-2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{23}{8}$ より，頂点の座標は $\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{23}{8}\right)$

よってこの放物線を x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 平行移動した放物線の頂点の座標は $\left(\dfrac{7}{4},\ \dfrac{1}{8}\right)$ である．

したがって，移動後の放物線の方程式は　$\boldsymbol{y=-2\left(x-\dfrac{7}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}}$　$(y=-2x^2+7x-6)$

(2)　題意より，放物線 $y=3x^2-6x+4$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 平行移動するともとの放物線に重なる．

$y=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1$ より，この放物線の頂点の座標は $(1,\ 1)$ である．

この放物線を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 平行移動した放物線の頂点の座標は $(3,\ 0)$

よって，もとの放物線の方程式は $y=3(x-3)^2=3x^2-18x+27$ である．

したがって，$\boldsymbol{a=3,\ b=-18,\ c=27}$

2　放物線 $y=2x^2-x+3$ を次の点や直線に関して対称に移動した放物線の方程式を求めよ．

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点　　(4)　直線 $x=1$

$y=2x^2-x+3=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{23}{8}$ より，この放物線の頂点の座標は $\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{23}{8}\right)$

(1)　x 軸に関して対称に移動すると，頂点は $\left(\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{23}{8}\right)$ に移動し，凸方向が逆となる．

よって求める式は　$\boldsymbol{y=-2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{23}{8}}$　$(y=-2x^2+x-3)$

(2)　y 軸に関して対称に移動すると，頂点は $\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{23}{8}\right)$ に移動する．

よって求める式は　$\boldsymbol{y=2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{23}{8}}$　$(y=2x^2+x+3)$

(3)　原点に関して対称に移動すると，頂点は $\left(-\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{23}{8}\right)$ に移動し，凸方向が逆となる．

よって求める式は　$\boldsymbol{y=-2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{23}{8}}$　$(y=-2x^2-x-3)$

(4)　直線 $x=1$ に関して対称に移動すると，頂点は $\left(\dfrac{7}{4},\ \dfrac{23}{8}\right)$ に移動する．

よって求める式は　$\boldsymbol{y=2\left(x-\dfrac{7}{4}\right)^2+\dfrac{23}{8}}$　$(y=2x^2-7x+9)$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

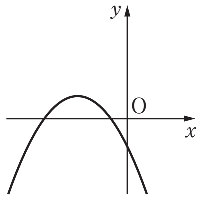
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　右図は2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフである．次の値の符号を調べよ．

(1)　a　　(2)　c

(3)　b　　(4)　$a+b+c$

(5)　b^2-4ac



$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ より，

　軸は $x=-\dfrac{b}{2a}$，頂点は $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

(1)　グラフは上に凸より，$a<0$　よって**負**.

(2)　y 切片が負より，$c<0$　よって**負**.

(3)　軸の x 座標が負より，$-\dfrac{b}{2a}<0$ である．$a<0$ より $b<0$　よって**負**.

(4)　$a+b+c$ は，$x=1$ のときの y 座標の値であり，グラフより**負**である．
　すなわち $a+b+c<0$

(5)　頂点の y 座標が正より　$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}>0$ である．$a<0$ より $b^2-4ac>0$　よって**正**.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　２次関数(1)

(1)　放物線 $y=x^2-2x+3$ の頂点の座標は（ ア ， イ ）であり，この放物線のグラフを x 軸方向に ウ ，y 軸方向に エ 平行移動すると放物線 $y=x^2-6x+14$ のグラフと重なる．

(2)　放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に 4 平行移動し，さらに原点に関して対称に移動すると，放物線 $y=-x^2-6x-11$ となるとき，$a=$ オ ，$b=$ カ ，$c=$ キ である．

(1)　$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$　……①　より，①のグラフの頂点の座標は **(1，2)** である．
また $y=x^2-6x+14=(x-3)^2+5$　……②　より，②のグラフの頂点の座標は (3，5) である．
よって，①のグラフを x 軸方向に **2**，y 軸方向に **3** 平行移動すると②のグラフに重なる．

(2)　題意より
$y=-x^2-6x-11$ のグラフを原点に関して対称移動し，さらに x 軸方向に -4 平行移動すると放物線 $y=ax^2+bx+c$ となる．
$y=-x^2-6x-11=-(x+3)^2-2$ より，頂点の座標は $(-3,\ -2)$
このグラフを原点に関して対称移動すると，頂点は (3，2) に移動し，
凸の方向が逆となる．
さらに x 軸方向に -4 平行移動すると，頂点は $(-1,\ 2)$ に移動する．
よって，移動後の方程式は　$y=(x+1)^2+2=x^2+2x+3$ である．
したがって，$a=\mathbf{1}$，$b=\mathbf{2}$，$c=\mathbf{3}$　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。